Midtoets Complexe Analyse
15/12/06, 13.15–14.00 uur

1. Waar is de functie $f(z) = 2y - ix$, $z = x + iy$, differentieerbaar?
2. Bepaal de afgeleide van de 'principal branch' van z^{1+i} in $z = i$.
3. Laat Γ de omtrek van het vierkant met hoekpunten $z = 0$, $z = 1$, $z = 1+i$, en $z = i$ zijn, die eenmaal in positive zin doorlopen wordt. Bereken de integraal
$$\int_\Gamma \bar{z}^2 dz.$$
4. Bereken
$$\int_\Gamma \sin^2 z \cos z \, dz,$$ beginpunt $z = 1$
langs de rechte die $z = 1$ verbindt met $z = 1 + i$.

Midtoets Complexe Analyse 15-12-2006

① $f(z) = 2y - ix$

$z = x + iy$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

hier $u = 2y$ en $v = -x$.

$f(z)$ is differentieerbaar in een punt als de limiet

$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ bestaat.

Dit komt neer op $f(z)$ is differentieerbaar als $u(x,y)$ en $v(x,y)$ beide continue eerste partiele afgeleiden hebben en voldoen aan de Cauchy Riemann vergelijkingen:

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta v}{\delta y} \quad \text{en} \quad \frac{\delta v}{\delta x} = -\frac{\delta u}{\delta y}$$

Bij $f(z) = 2y - ix$:

$$\frac{\delta u}{\delta x} = 0 = \frac{\delta v}{\delta y} \qquad \frac{\delta v}{\delta x} -1 \neq -2 = -\frac{\delta u}{\delta y}.$$

Dus $f(z)$ is nergens differentieerbaar.

② $z^{1+i} = e^{(1+i)\log z}$

$= e^{(1+i)(\text{Log}|z| + i\text{Arg}(z) + 2k\pi i)}$

$= e^{\text{Log}|z| + i\text{Arg}(z) + 2k\pi i + i\text{Log}|z| - \text{Arg}(z) - 2k\pi}$

$= e^{\log z} e^{i \log z}$

de principal branch van $\log z$ is $\text{Log}\, z$.

$\Rightarrow$ de principal branch van $e^{\log z}$ is $e^{\text{Log}\, z}$

en de principal branch van $e^{\log z} e^{i\log z}$ is $e^{\text{Log}\, z} e^{i \text{Log}\, z}$.

$$\frac{\delta}{\delta z}\left[e^{\text{Log} z} e^{i \text{Log} z}\right] = e^{\text{Log} z + i \text{Log} z} (1+i)\frac{1}{z}.$$

in $z = i$: $\frac{1+i}{i} e^{\text{Log} i + i \text{Log} i} = (-i+1) e^{\text{Log} 1 + i\text{Arg} i + i\text{Log} 1 - \text{Arg} i}$

$= (-i+1)\, e^{\frac{1}{2}\pi i - \frac{1}{2}\pi}$

$= (1-i)\, e^{\frac{1}{2}\pi(i-1)}$

③ Γ de omtrek van het vierkant met hoekpunten
$z=0,\ z=1,\ z=1+i,\ z=i$.
eenmaal in positieve zin doorlopen.

$$\int_\Gamma \bar{z}^2 dz = \int_{\gamma_1} \bar{z}^2 dz + \int_{\gamma_2} \bar{z}^2 dz + \int_{\gamma_3} \bar{z}^2 dz + \int_{\gamma_4} \bar{z}^2 dz$$

waarbij: $\gamma_1 : z=0 \to z=1$
$\gamma_2 : z=1 \longrightarrow z=1+i$
$\gamma_3 : z=1+i \longrightarrow z=i$
$\gamma_4 : z=i \longrightarrow z=0$.

$\gamma_1 : \bar{z} = x \quad 0 \le x \le 1$
$\gamma_2 : \bar{z} = 1-iy \quad 0 \le y \le 1$
$\gamma_3 : \bar{z} = 1-x-i \quad 0 \le x \le 1$
$\gamma_4 : \bar{z} = iy-i \quad 0 \le y \le 1$

$$\int_\Gamma \bar{z}^2 dz = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 -i(1-iy)^2 dy + \int_0^1 -(1-x-i)^2 dx + \int_0^1 i(iy-i)^2 dy$$

$$= \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[-iy - y^2 + i\tfrac{1}{3}y^3\right]_0^1 + \left[-x + \tfrac{1}{2}x^2 + ix - \tfrac{1}{3}x^3 - i\tfrac{1}{2}x^2 + x\right]_0^1 + \left[-i\tfrac{1}{3}y^3 + iy^2 - iy\right]_0^1$$

$$= \tfrac{1}{3} - i - 1 + \tfrac{1}{3}i - 1 + \tfrac{1}{2} + i - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}i + 1 - \tfrac{1}{3}i + i - i$$

$$= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}i$$

④ $\int_\Gamma \sin^2 z \cos z \, dz$
langs de rechte van $z=1$ naar $z=1+i$
dus $z = 1+iy \quad 0 \le y \le 1$.

$$\int_\Gamma \sin^2 z \cos z \, dz = \left[\tfrac{1}{3}\sin^3 z\right]_1^{1+i}$$
$$= \tfrac{1}{3}\sin^3(1+i) - \tfrac{1}{3}\sin^3(1).$$